Programme de khôlle de maths n° 7

Semaine du 10 Novembre

Cours

Chapitre 4 : Entiers, sommes et récurrences

- Nombres entiers, familles finies et dénombrables
- Sommes sur une partie finie de $\mathbb{Z}$, relation de Chasles, changement d'indice, changement de sens de sommation
- Formules $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} q^k$, $\sum_{k=p}^{n} q^k$, formule de factorisation $x^n - y^n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}$, formule du binôme de Newton.
- Récurrence simple, récurrence double, récurrence forte.
- Somme double, permutations de sommes : $\sum_{i=a}^{b} \sum_{j=c}^{d} u_{i,j} = \sum_{j=c}^{d} \sum_{i=a}^{b} u_{i,j}$.
- Permutation de sommes triangulaires : $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} u_{i,j}$.
- Produit de sommes : $\left(\sum_{i=a}^{b} a_i\right)\left(\sum_{j=c}^{d} b_j\right) = \sum_{i=a}^{b} \sum_{j=c}^{d} a_i b_j$

Questions de cours et exercices vus en classe

Pas de question de cours

Exercices

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} (k+2)^2$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{5^k}}$
3. Calculer $\sum_{k=2}^{n} 2^{n-k} x^k$
4. Calculer $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$
5. Montrer que pour tout entiers $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
6. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i$
7. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$
8. On pose $u_0 = 1$, $u_1 = -4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$. Montrer par récurrence double que pour tout entier naturel n : $u_n = (1-3n)2^n$.